Algèbre linéaire

1 Exercices

Exercice 1.1 (Calcul de polynôme de matrice).
(a) Soit $M \in M_n(K)$ et $P \in K[X]$ de degré d. Estimer la complexité du calcul naïf de $P(M)$.
(b) Supposons qu'on connaisse un polynôme annulateur A de M, de degré $a < d$. Utiliser la division euclidienne pour calculer $P(M)$ de manière plus efficace, et donner la complexité du calcul.
(c) Dans le cas où M est la matrice d'une symétrie, donner la complexité du calcul de $P(M)$.
(d) Lorsqu'on a A un polynôme annulateur de M et $A = A_1A_2$ avec A_1, A_2 premiers entre eux dans $K[X]$, utiliser le lemme des noyaux pour en déduire les matrices des projecteurs associés à la décomposition

$$K^n = \operatorname{Ker} A_1(M) \oplus \operatorname{Ker} A_2(M).$$

Combien coûte ce calcul en fonction du degré de A_1 et de A_2 ?

Exercice 1.2 (Calcul du polynôme caractéristique).
Soit un corps K tel que K a au moins $n + 1$ éléments distincts $x_0, \cdots, x_n$ et $M \in M_n(K)$.

(a) Expliquer comment calculer χ_M par interpolation en fonction des $\det(x_iI_n - M)$.
(b) Donner la complexité totale de ce calcul.
(c) Si $K = \mathbb{F}_p$ avec $p < n$ premier, comment peut-on adapter la méthode pour calculer χ_M ?

Exercice 1.3 (Recherche du polynôme minimal d'une matrice).
(a) Soit K un corps et $M \in M_n(K)$. Pour un vecteur $v \in K^n$ non nul, on note $\pi_{M,v}$ le plus petit polynôme non nul unitaire P tel que $P(M)(v) = 0$. Montrer que $\pi_{M,v} | \pi_M$.
(b) Pour $v \neq 0$ fixé, indiquer comment calculer $\pi_{M,v}$ à l'aide d'un pivot de Gauss.
(c) Donner la complexité de ce calcul en nombre d'opérations dans K.
(d) Montrer comment retrouver π_M en fonction de certains $\pi_{M,v}$ à l'aide du ppcm.

2 TP

Exercice 2.1 (Noyau et image d'une matrice).
(a) En se basant sur la commande `rref` de Xcas (mais pas `ker` ni `image`, qu'on peut tester à part si on veut), écrire un algorithme qui à une matrice $M \in M_{m,n}(K)$ associe une base de son noyau dans K^n, ou une famille libre d'équations de celui-ci.
(b) Faire de même avec l'image de M.
(c) Déduire des deux cas précédents une fonction qui à une famille de vecteurs de K^n associe une famille libre d'équations du sous-espace vectoriel qu'elle engendre, et réciproquement qui à une famille d'équations associe une base du sous-espace vectoriel qu'elle détermine.

Exercice 2.2 (Calcul de déterminant de matrice dans un anneau).
(a) Pour $M \in M_n(\mathbb{Z})$ à coefficients « aléatoires » avec $n = 50$ ou 100, évaluer les temps de calculs de $\det(M)$ en Xcas. Essayer d'en déduire une indication sur la complexité de l'algorithme utilisé.

(*b*) On définit, pour une taille de matrice n, la matrice dans $M_n(\mathbb{Z}[x_2, x_4, \cdots, x_{2n}])$ dont le (i,j)-ième coefficient est x_{i+j}. Comparer les temps de calcul de $\det(M)$ pour $n = 6$ et $n = 12$. Conjecturer là aussi la complexité de l'algorithme utilisé.

Exercice 2.3 (Calculs effectifs de polynômes caractéristique et minimal)**.**

(*a*) Écrire un algorithme basé sur l'exercice 1.1 pour calculer le polynôme caractéristique d'une matrice aléatoire $M \in M_n(\mathbb{Q})$. L'appliquer à une matrice $M \in M_{10}(\mathbb{Z})$ avec des coefficients raisonnables.

(*b*) Écrire un algorithme basé sur l'exercice 1.2 pour calculer le polynôme minimal d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{Q})$ et tester avec M de taille 3 ayant des 0 sur la diagonale et des 1 ailleurs, puis avec une matrice aléatoire de taille 30.

Exercice 2.4 (Modélisation d'un casse-tête)**.**
On considère un damier 3 par 3 de pions ayant une face noire et une face blanche. On peut effectuer les manoeuvres suivantes : retourner tous les pions d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale, il y a donc 8 manoeuvres possibles (3 de lignes, 3 de colonnes, 2 de diagonale). Il s'agit de savoir si en partant d'une configuration donnée on peut à l'aide de ces manipulations arriver à la configuration où tous les pions sont face noire visible, et le cas échéant donner les manipulations pour s'y ramener. On pourra utiliser l'algèbre linéaire dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$.