Exercice 1 : Suites de Sturm

Soit $P = -x^7 + x^4 + 12x - 5$.

1. Calculer la suite de Sturm de P en utilisant l'instruction de division euclidienne de polynômes de la calculatrice
2. Déterminer le nombre de racines réelles de P comprises entre -2 et 0 en utilisant les suites de Sturm, on donnera les détails des calculs. En déduire un rationnel approchant une racine réelle négative de P par dichotomie à 0.01 près.
3. Déterminer le nombre total de racines réelles de ce polynôme en utilisant une majoration du module des racines.
4. Déterminer des intervalles d'isolation de toutes les racines réelles de P.

Exercice 2 : Méthode de localisation hybride

Soit $P(x) = x^5 + 3x + 1$.

1. Déterminer des valeurs approchées des racines complexes de P (instruction `proot` de Xcas).
2. En déduire des boules dans le plan complexe contenant exactement une racine de P et de rayon plus petit que `1e-11`.
3. En utilisant une étape de la méthode de Newton avec du calcul exact, déterminer des valeurs approchées certifiées à `1e-20` près des racines complexes de P.
4. Combien d'étapes de la méthode de Newton sont nécessaires pour obtenir une approximation certifiée avec une précision fixée $\varepsilon > 0$? Indication : on double approximativement la précision à chaque itération
5. Peut-on en estimer le cout ? Indication : pour la dernière itération, on peut arrondir le numérateur et le dénominateur d'une racine approchée z à $k = O(-\ln(\varepsilon))$ bits, et montrer que le cout de Horner en z est en $O(n^2k^2)$ avec n=degre(P).

Exercice 3 : Factorisation sur les rationnels

Soit $P(x) = x^5 + x + 1$.

1. Calculer avec un logiciel des valeurs numériques approchées des racines complexes de P.
2. Trouver les combinaisons de racines dont la somme est entière (aux arrondis près).
3. En déduire la factorisation en facteurs irréductibles sur $\mathbb{Z}$ de P.
4. Que peut-on dire de la complexité de cette méthode pour trouver la factorisation d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré n ?

TP exercice 1 : Sturm

Implémenter le calcul de la suite de Sturm en calculant la liste des quotients afin d'optimiser les calculs en un point. Puis faire une fonction qui détermine le nombre de changements de signe (on pourra commencer par enlever les 0 avec `remove`) et enfin une fonction qui renvoie le nombre de racines réelles d'un polynôme dans un intervalle.

TP exercice 2 : Règle de Descartes

Soit le polynôme $P(x) = 2\,x^3 - x^2 - 4\,x + 1$. On veut déterminer des intervalles d'isolation des racines réelles positives de P.

1. Implémenter la règle de Descartes sur $]0, +\infty[$ (nombre de racines $\leq$ au nombre de changements de signe des coefficients). On peut utiliser `coeffs` pour avoir la liste des coefficients de P.
2. Pour faire de même sur $]0, 1[$, on fait d'abord le changement de variables $x \to 1/x$ ($\tilde{P}(x) = x^3P(1/x)$) qui permet de se ramener à des racines dans $]1, +\infty[$ puis $x \to x+1$ ($\tilde{P}(x) = P(x+1)$) sur $]0, +\infty[$. On peut utiliser `revlist` pour calculer $\tilde{P}$ et `ptayl` pour faire le changement d'origine.
3. Pour faire de même sur $]a, b[$, on pose $P(x) = Q((b-a)t + a)$.
4. Déterminer une majoration M des racines de P en module. Puis par dichotomie, trouver des intervalles d'isolation des racines de P.

TP exercice 3 : localisation hybride

Programmer la recherche approchée de racines complexes en utilisant la méthode de Newton. Pour éliminer implicitement les racines z_j de P déjà déterminées

$$P(x) = Q(x) \prod_{j=1}^{k} (x - z_j)$$

on utilise le pas de Newton modifié :

$$z - \frac{Q(z)}{Q'(z)} = z - \frac{1}{\frac{Q'(z)}{Q(z)}} = z - \frac{1}{\frac{P'(z)}{P(z)} - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{z-z_j}}$$