Examen du jeudi 8 janvier 2026, de 8h30 à 10h30.

Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents et portables interdits.

Ce sujet comporte **deux pages**. *Le barème est indicatif.*

1. Courbe paramétrée (9 points)

On considère la courbe paramétrée C définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) &= e^t + e^{-2t} \\ y(t) &= -2e^t + e^{-2t} \end{cases}$$

(1) Déterminer les symétries éventuelles et le domaine d'étude de (C).

(2) La courbe admet-elle des branches infinies ? Si oui, les décrire (asymptotes, branches paraboliques...).

(3) La courbe admet-elle des points singuliers ? Si oui, les décrire (tangente, position par rapport à la tangente).

(4) Dresser le double tableau de variations sur le domaine d'étude.

(5) Faire le tracé de la courbe en indiquant le sens de parcours et les éléments importants déterminés aux questions précédentes.

(6) La courbe est-elle convexe ? Justifier.

(7) Déterminer la longueur de l'arc de courbe entre les points de paramètre $t = 0$ et $t = \ln((\sqrt{5}+1)/2)$ sous forme d'une intégrale, puis en donner une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

(8) Soit Z la zone délimitée par la courbe et la droite $x = 2$. Hachurer Z. Déterminer l'aire A de Z :

$$A = \iint_Z dx\, dy$$

(9) (Bonus) x et y sont solutions d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Quelles sont les valeurs propres de la matrice M du système ? Justifier.

2. Calcul variationnel (3 points)

(1) Donner l'équation d'Euler-Lagrange correspondant au lagrangien

$$L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{C}{x}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}$, et $m > 0, C$ sont des constantes.

(2) Déterminer le hamiltonien associé et justifier qu'il est conservé. Quel est le type de l'équation différentielle que l'on peut en déduire ?

3. Systèmes différentiels (8 points)

On considère le système différentiel d'inconnues les fonctions x et y où $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & -x+4y \\ \frac{dy}{dt} & = & x-4y \end{array} \right.$$

(1) Donner la matrice du système, déterminer ses valeurs propres et des vecteurs propres associés.

(2) Déterminer la solution générale de (*).

(3) Vérifier que $x+y$ est une intégrale première du système (i.e. est indépendant du temps).

(4) Donner la solution du système ayant comme condition initiale $x(0)=1, y(0)=0$. Quel est son comportement lorsque $t \to +\infty$?

(5) On suppose x et y sont positifs ou nuls à l'instant initial $t=0$, i.e. $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0$. Quelle(s) condition(s) initiale(s) permet(tent) d'assurer que x tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$?

(6) On considère dans cette question le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & -ax+by+c \\ \frac{dy}{dt} & = & ax-by \end{array} \right.$$

où a, b, c sont des paramètres réels strictement positifs. x est-il borné lorsque t tend vers $+\infty$?

(7) On modélise l'excès de CO2 atmosphérique à l'instant t (par rapport à la concentration préindustrielle, en unité de temps arbitraire) par $x(t)$ et l'excès de CO2 dans l'océan et la biosphère par $y(t)$ avec $a=4$ et $b=1$ [N.B. l'énoncé initial indiquait $a=1$ et $b=4$].
Discuter l'évolution de l'excès du CO2 modélisé dans l'atmosphère en supposant les hypothèses de la question 4 (i.e. arrêt des émissions humaines à l'instant $t=0$), puis celles de la question 6 (i.e. émissions humaines constantes).

(8) (Bonus) Un modèle plus réaliste de système différentiel linéaire à coefficients constants en dimension 4 donne pour l'excès de concentration atmosphérique $x(t)$ (t en années) dans les hypothèses de la question 3 (arrêt des émissions à l'instant $t=0$) :

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{-t/\tau_1} + a_2 e^{-t/\tau_2} + a_3 e^{-t/\tau_3}$$

où $a_0 = 0.2$, $a_1 = 0.26, \tau_1 = 20$, $a_2 = 0.34, \tau_2 = 100$, $a_3 = 0.2, \tau_3 = 400$ (a_1, τ_1 modélisent l'océan superficiel et la biosphère, a_2, τ_2 l'océan intermédiaire et a_3, τ_3 l'océan profond.)
Que peut-on dire des valeurs propres de la matrice du système ?