Correction Examen Terminal Mat307
Janvier 2026

Exercice 1: Courbe Paramétrée

(1) La courbe (C) est définie pour $t \in \mathbb{R}$. Elle n'admet aucune symétrie et doit donc être étudiée sur son ensemble de définition.

(2) La courbe (C) admet des branches infinies en $t \to \pm\infty$, qu'il convient d'étudier séparément:

- Pour $t \to +\infty$:

  $e^t \to +\infty$ et $e^{-2t} \to 0$ donc $x(t) \to +\infty$; $-2e^t \to -\infty$ et $e^{-2t} \to 0$ donc $y(t) \to -\infty$.
  On étudie la limite quand $t \to +\infty$ du rapport $y(t)/x(t)$: $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{-2e^t}{e^t} = -2$.

  On a donc une direction asymptotique $y = -2x$. On cherche l'ordonnée à l'origine
  $b = \lim\limits_{t\to\infty}(y(t) + 2x(t))$: $b = \lim\limits_{t\to\infty}(3e^{-2t}) = 0$
  La courbe (C) admet donc une asymptote oblique d'équation $y = -2x$ en $t \to +\infty$.

- Pour $t \to -\infty$:

  $e^t \to 0$ et $e^{-2t} \to +\infty$ donc $x(t) \to +\infty$; $-2e^t \to 0$ et $e^{-2t} \to +\infty$ donc $y(t) \to +\infty$.
  On étudie la limite quand $t \to -\infty$ du rapport $y(t)/x(t)$: $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{e^{-2t}}{e^{-2t}} = 1$.

  On a donc une direction asymptotique $y = x$. On cherche l'ordonnée à l'origine
  $b = \lim\limits_{t\to-\infty}(y(t) - x(t))$: $b = \lim\limits_{t\to-\infty}(-3e^t) = 0$
  La courbe (C) admet donc une asymptote oblique d'équation $y = x$ en $t \to +\infty$.

(3) On calcule $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ et $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ et on cherche les valeurs de t pour lesquelles tous deux s'annulent simultanément.

$$\begin{cases} x'(t) = e^t - 2e^{-2t} \\ y'(t) = -2e^t - 2e^{-2t} \end{cases}$$

Or, $x'(t) = 0$ pour $t = \frac{\ln(2)}{3}$ et $y'(t) = 0$ n'admet aucune solution. Il n'existe donc aucune valeur de t telle que $x'(t) = y'(t) = 0$. Il n'y a donc aucun point singulier

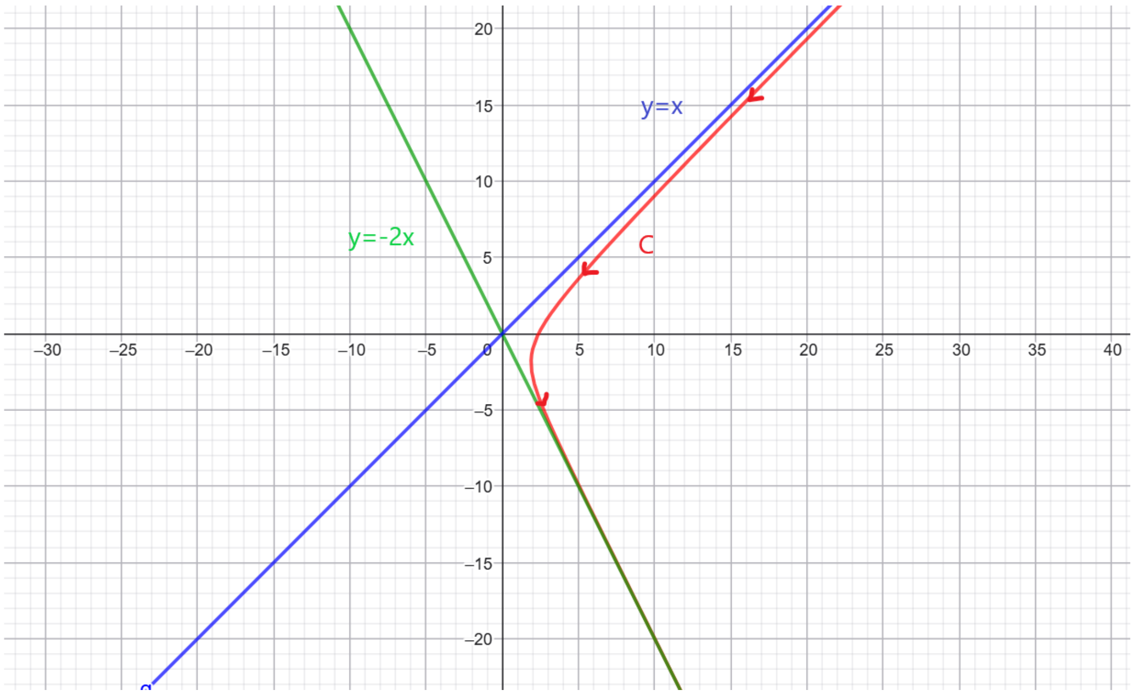
(4)

t	$-\infty$	$\frac{\ln(2)}{3}$	$+\infty$
$x(t)$	$+\infty$ ↘	$3 \times 2^{-2/3} \approx 1.89$	↗ $+\infty$

t	$-\infty$	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

On précise $y\left(\frac{\ln(2)}{3}\right) = -3 \times 2^{-2/3} \approx -1.89$.

(5)



On vérifie le tracé avec la commande `plotparam()` de Xcas. De cette façon, Xcas définit les dérivées successives de $x(t)$ et $y(t)$: `x0,x1,x2,y0,y1,y2`.

(6) On calcule $x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ et $y''(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$:

$$\begin{cases} x''(t) = e^t + 4e^{-2t} \\ y''(t) = -2e^t + 4e^{-2t} \end{cases}$$

La convexité est donnée par le signe de $x'y'' - x''y'$:

$$x'y'' - x''y' = (e^t - 2e^{-2t})(-2e^t + 4e^{-2t}) - (e^t + 4e^{-2t})(-2e^t - 2e^{-2t}) = 18e^{-t} > 0$$

Donc la courbe (C) est strictement convexe.

(7) La longueur d'arc de courbe entre deux points de paramètres t_0 et t_1 est donnée par:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

Dans notre cas:

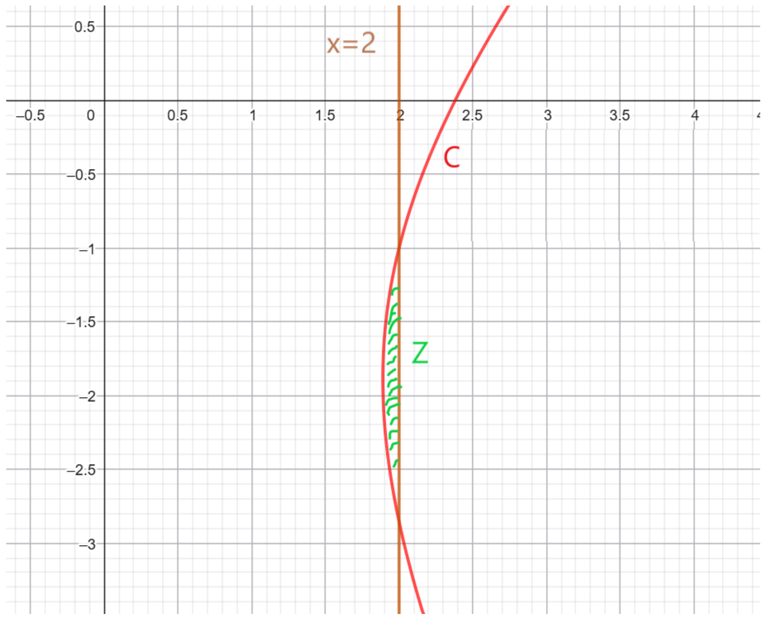
$$L = \int_0^{\ln((\sqrt{5}+1)/2)} \sqrt{(e^t - 2e^{-2t})^2 + (2e^t + 2e^{-2t})^2}\, dt$$

On peut trouver une valeur approchée à l'aide de différentes commandes Xcas:

- Via la methode de Romberg: `romberg(sqrt(x1^2+y1^2),t,0,ln((sqrt(5)+1)/2))`
- Via la quadrature de Gauss: `gaussquad(sqrt(x1^2+y1^2),t,0,ln((sqrt(5)+1)/2))`
- Avec `integrate()` en utilisant une valeur approchée pour une des bornes: `integrate(sqrt(x1^2+y1^2),t,0.0,ln((sqrt(5)+1)/2))`

On trouve $L \approx 1.87125$.

(8)



On cherche l'aire A de Z: $A = \iint_Z dx\,dy = -\int_\gamma y dx$ avec γ le contour orienté de Z. On peut décomposer γ en deux morceaux γ_1 et γ_2 paramétrisés selon:

$$\gamma_1\colon\ x = e^t + e^{-2t} \text{ et } y = -2e^t + e^{-2t},\ t \in [0, \ln((1+\sqrt{5})/2)]$$
$$\gamma_2\colon\ x = 2 \text{ et } y = t, t \in [0, \frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)]$$

En effet, la courbe (C) admet deux points tels que $x(t) = 2$: $t = 0$ et $t = \ln((1+\sqrt{5})/2)$. γ_1 est donc donné par l'arc de courbe de (C) entre ces deux points. γ_2 est le segment vertical porté par la droite d'équation $x = 2$ (voir figure). Il relie les points $(2, y(0))$ et $\left(2, y\left(\ln((1+\sqrt{5})/2)\right)\right)$. On déduit sa longueur $L = \frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)$, ce qui justifie notre paramétrage.

Donc $A = -\int_{\gamma_1} y dx - \int_{\gamma_2} y dx$. Or, x est constant sur γ_2. Le segment γ_2 ne contribue donc pas à l'intégrale, et $A = -\int_{\gamma_1} y dx$.

$$A = -\int_0^{\ln((1+\sqrt{5})/2)} y(t)x'(t)dt = -\int_0^{\ln((1+\sqrt{5})/2)} (-2e^t + e^{-2t})(e^t - 2e^{-2t}) = \frac{3}{4}(5\sqrt{5}-11) \approx 0.135$$

On a effectué le calcul via la commande Xcas:
`simplify(-integrate(y0*x1,t,0,ln((sqrt(5)+1)/2)))`

(9) La solution d'un système différentiel linéaire $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est de la forme:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \text{ diag}(e^{\nu_1 t}, e^{\nu_2 t})\ P^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

avec ν_1 et ν_2 les valeurs propres de M, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ et P la matrice de transformation associée à M telle que $M = P \text{ diag}(\nu_1, \nu_2)\ P^{-1}$. Si la courbe (C) est solution d'un système de ce type, alors il suffit de lire les valeurs propres de M dans les exponentielles contenues dans les expressions de $x(t)$ et $y(t)$. On déduit $\nu_1 = 1$ et $\nu_2 = -2$.

Exercice 2: Calcul variationnel

(1) Selon les équations d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x} = 0$$

Ici, $\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \to \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$ et $\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial x} = \frac{C}{x^2}$, l'équation du mouvement est donc:

$$m\ddot{x} - \frac{C}{x^2} = 0$$

(2) Le Hamiltonien est donné par:

$$H = \dot{x}\frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}} - L \longrightarrow H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{C}{x}$$

Comme celui-ci ne dépend pas explicitement du temps, il est une intégrale première. On peut le vérifier explicitement:

$$\frac{dH}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} - \frac{C}{x^2}\dot{x} = \left(m\ddot{x} - \frac{C}{x^2}\right)\dot{x}$$

Donc, par Euler-Lagrange, $\frac{dH}{dt}$=0. On en déduit $H = E$, avec E une constante. On aboutit à l'équation différentielle:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{C}{x} = E.$$

C'est une équation à variables séparables, où le temps n'apparaît pas explicitement.

Exercice 3: Systèmes différentiels

(1) $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique $\det(M - \lambda\mathbb{I})$: $(-1-\lambda)(-4-\lambda) - 4 = 0 \to \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5$. Les vecteurs propres $\vec{v}$ associés à une valeur propre λ sont donnés par $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$. On trouve $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2) La solution d'un système différentiel linéaire $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est de la forme:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\ \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})\ P^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

avec λ_1 et λ_2 les valeurs propres de M, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ et P la matrice de transformation associée à M telle que $M = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)P^{-1}$. P est formé des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2: $P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Ici,

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. La solution est donc:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4C_1 + C_2e^{-5t} \\ C_1 - C_2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

(3) $x + y = 5C_1$, donc $\frac{dx+dy}{dt} = 5 \times \frac{d(C_1)}{dt} = 0$. On déduit que $x + y$ est une intégrale première du système. Cela peut être vérifié sans calculer explicitement la solution générale, uniquement en sommant les deux lignes du système différentiel.

(4) La condition intiale $x(0) = 1, y(0) = 0$ impose de résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 4C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$$

On déduit: $C_1 = C_2 = \frac{1}{5}$. La solution devient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 + e^{-5t} \\ 1 - e^{-5t} \end{pmatrix}$. Lorsque $t \to +\infty$, $x \to 4/5$ et $y \to 1/5$. La trajectoire de la courbe représentant la solution converge donc vers le point $(4/5, 1/5)$ lorsque $t \to +\infty$.

(5) <u>Méthode 1:</u>

La valeur de la constante C_1 détermine les coordonnées du point $(4C_1, C_1)$ vers lequel converge la solution. En effet, $\forall C_2 \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to+\infty} C_2 e^{-5t} = 0$, donc la partie dépendant de C_2 ne contribue jamais à l'infini. Donc $x(t)$ converge vers 0 en $+\infty$ ssi $C_1 = 0$, $\forall C_2 \in \mathbb{R}$. Au niveau des conditions initiales, cela impose:

$$x(0) = C_2,\ y(0) = -C_2 \longrightarrow x(0) = -y(0)$$

Or, on sait que $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0$. Donc la seule condition initiale possible assurant $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Méthode 2:</u>

On sait que $x(t) + y(t)$ est une intégrale première du système, qui vérifie $x(t) + y(t) = 5C_1$. On sait aussi que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 4C_1$ et on veut $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Cela impose $C_1 = 0$, soit $x(t) + y(t) = 0$. Or $x(0) \geq 0$ et $y(0) \geq 0$, donc les seules conditions initiales possibles sont $x(0) = y(0) = 0$.

(6) On a un système différentiel avec second membre:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si on s'intéresse à la partie homogène, on peut considérer les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$ (le système précédemment étudié correspond au cas particulier $a = 1$ et $b = 4$). On obtient $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -a - b$. Au niveau de la solution homogène, la valeur propre 0 donnera des constantes tandis que la valeur propre $-a - b$ donnera des contribution proportionnelles à $e^{-(a+b)}$, qui n'ont aucune influence en $t \to +\infty$. La solution homogène est donc bornée. Cependant, le second membre induit une solution particulière linéaire en temps, donc non-bornée. Ainsi, la solution complète est non-bornée à cause de la contribution du second membre.

(7) L'excès de CO2 dans l'océan et la biosphère est corrélé à l'excès de CO2 atmosphérique suivant le système différentiel $(*)$. Le fait que $x(t) + y(t) = cst$ (question (3)) en l'absence de second membre traduit le fait qu'en l'absence de production la quantité totale de CO2 est conservée. A $t \to +\infty$, la solution converge vers un point d'équilibre, ce qui traduit le fait que la quantité de CO2 totale converge vers une répartition atmosphère - biosphère-océan constante. La nature de ce point d'équilibre dépend des conditions initiales, c'est-à-dire de l'excès relatif de CO2 présent initialement dans l'atmosphère et dans les océans et la biosphère. Les conditions initiales de la question (4), par exemple, traduisent un excès initial nul au niveau des océans et un excès relatif de 1 au niveau de l'atmosphère: le modèle converge à grand t vers une répartition 4/5 atmosphère / 1/5 océan-biosphère. En outre, la question (5) montre qu'il n'existe aucune condition initiale non triviale permettant de retrouver un excès de concentration atmosphérique nul après l'évolution libre du système. On en conclut que le CO2 atmosphérique ne sera jamais totalement absorbé par la biosphère et les océans.

Si l'on admet des émissions humaines constantes, on se ramène au système proposé en (6). Le comportement de $x(t)$ est dominé par la solution particulière $x_p(t)$, qui est une croissance linéaire de l'excès de CO2 atmosphérique. Ainsi, l'océan et la biosphère n'absorbent plus l'excès de CO2 et celui-ci sature l'atmosphère à l'infini.
Erratum: Les valeurs correctes pour que la modélisation rende effectivement compte de l'évolution de l'excès de CO2 sont $a = 4$ et $b = 1$ (au lieu de $a = 1$ et $b = 4$). Ainsi, reprenant les conditions initiales de (4), on obtient $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \frac{1}{5}$ et $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{4}{5}$, ce qui traduit le fait que 20% de l'excès de CO2 est contenu dans l'atmosphère après évolution libre du système, alors que 80% est absorbé par l'océan et la biosphère.

(8) On peut réécrire la solution du système homogène de la question (6) comme:
$x_h(t) = a_0 + a_1 e^{-t/\tau_1}$, avec $a_0 = (b/a)C_1$, $a_1 = C_2$ et $\tau_1 = 1/(a+b)$. On a donc $\tau_1 = -1/\lambda_1$ avec $\lambda_1 = -a - b$ la seconde valeur propre de la matrice 2×2 associée au système différentiel.
Si l'on extrapole à la modélisation proposée ici, qui comporte 4 termes, on peut en déduire qu'il s'agit de la solution d'un système différentiel à quatre inconnues. Celui-ci est donc décrit par une matrice 4×4, dont la première valeur propre est 0 et les suivantes sont $\lambda_{1,2,3} = -\frac{1}{\tau_{1,2,3}}$.