Exercice 1. *On considère la matrice suivante*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donner son image et son noyau. Vérifier que le théorème du rang est respecté.

Exercice 2. *Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2 et on considère l'ensemble $W = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$.*

1. *Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.*
2. *Soit $\phi\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = M + {}^tM$. Montrer que ϕ est linéaire.*
3. *Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ (Une matrice de taille 4×4 est attendue).*
4. *Montrer que $Im(\phi) = W$. L'application ϕ est-elle injective ?*
5. *Donner une base et la dimension de W.*

Exercice 3. *On considère l'application $\psi\colon C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par*

$$\psi(f) = f'' + f' - 2f$$

1. *Montrer que ψ est linéaire.*
2. *Donner la dimension et une base de $Ker(\psi)$.*

Exercice 4. *On considère l'application $\phi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = xx' + 2xy' + 2x'y + 4yy'$$

1. *Montrer que ϕ est bilinéaire. Est-elle symétrique ?*
2. *Donner la matrice de ϕ dans la base canonique.*
3. *Donner la matrice de ϕ dans la base $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.*