MAT404 **Université Grenoble Alpes** **Le 24 mai 2018**

Durée : 2 heures

Seule une feuille <u>manuscrite</u> recto-verso de format A4 est autorisée.

Formes quadratiques, Analyse de Fourier

<u>Exercice 1</u> :

1. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Soient B_1 et B_2 deux bases de V et P la matrice de passage de B_1 vers B_2.

   (a) Soit u un vecteur de V. Soient U_1 et U_2 les vecteurs colonnes des coordonnées de u dans les bases B_1 et B_2. Donner le lien entre U_1, U_2 et P.

   (b) Soit $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On note M_1 la matrice de ϕ dans la base B_1 et M_2 la matrice de ϕ dans la base B_2. Donner la formule reliant M_1 et M_2.

   (c) Comparer le rang de M_1 et celui de M_2.

2. Rappeler la définition d'un produit scalaire sur un espace vectoriel réel V (on définira chaque terme précisément).

3. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

   (a) Rappeler la définition de la forme quadratique associée, $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   (b) Montrer la relation $\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$.

   (c) Soit M la matrice de ϕ dans une base B de $\mathbb{R}^2$. Sous quelle(s) condition(s) sur M la base B est elle ϕ-orthogonale ? ϕ-orthonormée ?

   (d) A quelles conditions sur la signature et sur le rang, la forme ϕ est elle un produit scalaire ?

<u>Exercice 2</u> :

Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont la forme quadratique associée, écrite dans la base canonique est $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$.

1. Donner M, la matrice de ϕ dans la base canonique ainsi que l'expression de $\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$.

2. Utiliser l'algorithme de Gauss pour réduire $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ à une somme de carrés. En déduire la signature de q. La forme ϕ est elle un produit scalaire ? Existe-t-il une base ϕ orthonormée ?

3. En utilisant la question précédente trouver une base B qui soit ϕ-orthogonale.

4. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt, orthonormaliser cette base pour le produit scalaire usuel. La base obtenue est elle aussi ϕ-orthogonale ?

Tournez s.v.p.

Exercice 3 :

1. (a) Montrer que la série $\left(\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}\right)$ est convergente.

   (b) La série $\left(\sum\limits_{l\geq 0} \frac{(-1)^l}{2l+1}\right)$ est elle absolument convergente ?

2. (a) Par une intégration par partie, calculer pour k entier, $k > 0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)dx$$

3. En déduire les coefficients de Fourier trigonométriques $a_0(f)$, $a_k(f)$ et $b_k(f)$ pour $k > 0$ de la fonction f définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x) = x$.

4. Utiliser le théorème de Dirichlet et montrer que, pour tout $x \in \left]-\pi,\pi\right[$:

$$x = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$$

   (on énoncera et vérifiera toutes les hypothèses nécessaires).

5. (a) Calculer $\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$ pour $k = 2l$ et pour $k = 2l+1$.

   (b) Déduire de la question 4. évaluée en $x = \frac{\pi}{2}$, et de la question 5.(a), que la série $\left(\sum\limits_{l\geq 0} \frac{(-1)^l}{2l+1}\right)$ converge et calculer la valeur de $\sum\limits_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1}$.

6. A l'aide de l'identité de Parseval, calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 4 :

On considère l'espace vectoriel $V = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$$

et un sous espace de V, $W = Vect\{1, x\}$.

1. Montrer que $\{1, x\}$ est une base orthogonale de W. Par une normalisation de chacun des vecteurs de cette base, en déduire une base orthonormée $\{f_1, f_2\}$ de W.
2. Rappeler la formule générale de la projection orthogonale d'un vecteur $f \in V$ sur W. (on utilisera la base $\{f_1, f_2\}$).
3. Si f est paire, simplifier la formule obtenue en 2.
4. Si f est impaire, simplifier la formule obtenue en 2.
5. Déduire des questions 3. et 4. les projections orthogonales des fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ sur W. Trouver la projection orthogonale de la fonction $f + g$ sur W.