Université Joseph Fourier **MAT244 : Contrôle continu du 18 mars 2014**

Durée 2 heures
Documents et calculatrices non autorisés

Barême indicatif : questions de cours, 3 points ; exercice 1, 9 points ; exercice 2, 10 points.

Questions de cours.

1. Soit $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel V. Donner la définition de q, la forme quadratique associée, et montrer que pour tous v, w dans V,
$$\Phi(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)).$$
2. Soit $f : V \to W$ une application linéaire. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 1.
Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par
$$\Phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

1. Montrer que Φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Donner M, la matrice de Φ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Lorsque v est un vecteur dans $\mathbb{R}^3$, on note (x_1, x_2, x_3) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_0$, et (X_1, X_2, X_3) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1$. Exprimer x_1, x_2 et x_3 en fonction de X_1, X_2 et X_3.
5. Montrer que si q est la forme quadratique associée à Φ alors, avec les notations de la question précédente, pour tout v dans $\mathbb{R}^3$,
$$q(v) = 2X_1^2 + X_2^2 + 2X_3^2.$$
Sans utiliser la formule du changement de base, en déduire N, la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}_1$.
6. Donner P, la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}_1$.
7. Rappeler la formule de changement de base qui relie M, N et P, et vérifier cette formule pour les matrices calculées ci-dessus.
8. Quel est le rang de Φ ?
9. Existe-t-il des vecteurs non nuls v et w dans $\mathbb{R}^3$ tels que $\Phi(v, w) = 0$?
10. Existe-t-il un vecteur non nul x dans $\mathbb{R}^3$ tel que $\Phi(x, x) = 0$?

Exercice 2.

Soit $V = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère sur V la forme bilinéaire symétrique définie par

$$\Phi(P, Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire (on admet que c'est une forme bilinéaire symétrique).
2. Et si on considère la forme Φ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$, est-ce un produit scalaire ? Pour ce qui suit, on considère Φ sur $V = \mathbb{R}_2[X]$.
3. Calculer $\Phi(c + bX + aX^2, \gamma + \beta X + \alpha X^2)$ pour tous réels $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, et en déduire l'expression de la matrice de Φ dans la base $(1, X, X^2)$ de V.
4. Soit $W = \{P \in V \mid P(1) = 0\}$. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de V et en calculer une base.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que $aX^2 + bX + c$ soit dans le sous-espace vectoriel $W^\perp$ des polynômes Φ-orthogonaux à W. En déduire une base de $W^\perp$.
6. On pose $P_1(X) = X - 1$ et $P_2(X) = X^2 - X$.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la famille $(P_1, P_2 + \lambda P_1)$ soit une base Φ-orthogonale de W.
   (b) En déduire une base Φ-orthonormée de W.
   (c) La compléter en une base orthonormée de V.