UGA Mat404 2018/9

Deuxième contrôle continu du mardi 26 mars, 9h45-10h45.
Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso.
Calculatrices, téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.

Exercice 1

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x,y) = 3x^2 - 12xy + 13y^2$.

1. Donner la matrice de q dans la base canonique.
2. (a) Appliquer **l'algorithme de Gauss** pour exprimer $q(x,y)$ comme une somme de carrés.
   (b) En déduire la signature de q, ainsi que son rang. Est ce que q est un produit scalaire de $\mathbb{R}^2$?
   (c) Donner une base orthogonale pour q.
   (d) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ orthonormée pour q ? Si oui, en trouver une.

Exercice 2

On considère la famille de vecteur de $\mathbb{R}^3$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

1. On considère l'ensemble $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + z = 0\}$. Montrer que H est un espace vectoriel et que F en est une base.
2. En déduire une base orthonormée de H pour le produit scalaire usuel **à l'aide du procédé de Gram-Schmidt**.

Exercice 3

On considère la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$q(P) = 2P'(0)^2 - 4P(0)P''(0)$$

1. (a) Calculer $q(a + bX + cX^2)$ puis la réduire en une somme de carrés par **l'algorithme de Gauss**.
   (b) En déduire la signature de q, ainsi que son rang. Existe il une base de $\mathbb{R}_2[X]$ orthonormée pour q ?
2. Déterminer, par la méthode de votre choix, la matrice M de q dans la base $\{1, X, X^2\}$.
3. Calculer la matrice de passage P de $\{1, X, X^2\}$ à $\{X, 1 - X^2, 1 + X^2\}$.
4. Calculer, **à l'aide de la question précédente**, la matrice de q dans la base $\{X, 1 - X^2, 1 + X^2\}$, puis en déduire une base orthogonale pour q.