UGA Mat406 2025

Examen du 10 mars, 8h30-10h30.

Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.
On pourra justifier le résultat de tout calcul fait à la calculatrice en indiquant sur la copie la commande utilisée.
Ce sujet comporte deux pages (barème indicatif non contractuel : 7, 6, 7).

1 Équation

On souhaite résoudre l'équation

$$(E) \quad x\sin(x) = 1$$

On note

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad g(x) = x\sin(x) - 1$$

Les deux parties 1.1 et 1.2 peuvent être traitées indépendamment.

1.1 Point fixe

1. Montrer que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème du point fixe sur l'intervalle $I = [1, \pi/2]$. On notera s l'unique solution de (E) sur I.
2. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une valeur approchée de s_1 à ε près, pour $\varepsilon > 0$.
3. Donner une valeur approchée de s_1 à $\varepsilon =$`1e-3` près en justifiant cette précision.
4. Donner une valeur approchée à la calculatrice de $f'(s_1)$. Cette méthode de résolution est-elle plus efficace qu'une résolution par dichotomie ?
5. On se place maintenant dans l'intervalle $J = [5\pi/6, \pi]$. Montrer que $x = f(x)$ admet une solution unique s_2 sur J (on pourra étudier g sur J).
6. Peut-on déterminer s_2 en appliquant la méthode du point fixe à f ? Justifiez.

1.2 Newton

1. Donner la suite (u_n) de la méthode de Newton appliquée à la résolution de $g(x) = 0$.
2. Déterminer le signe de g' et g'' sur $J = [5\pi/6, \pi]$.
3. En déduire une valeur initiale u_0 de la suite de Newton pour laquelle on peut certifier la convergence de u_n vers l'unique solution s_2 de $g(x) = 0$ sur J.
4. Calculer u_3 et donner une majoration de $|u_3 - s_2|$.

2 Précision

Dans cet exercice on calcule une valeur approchée de $\sin(7)$ en utilisant le développement en séries entières de $\sin(x)$ en $x = 0$ dont le rayon de convergence est $+\infty$. On pose

$$u_j(x) = \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad S_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j u_j(x), \quad \sin(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j u_j(x)$$

1. Donner une majoration de la valeur absolue du reste

$$R_n(7) = \sum_{j=n+1}^{\infty} (-1)^j u_j(7)$$

en fonction de $n \geq 3$. Indication : on pourra utiliser le critère des séries alternées ou le reste du développement de Taylor

2. Déterminer un ordre N à partir duquel on peut certifier que $|R_N(7)| \leq$`1e-2`.
3. Déterminer à la calculatrice la valeur exacte de $S_N(7)$ en déduire une valeur approchée . Comparer avec la valeur de $S_N(7.0)$. On indiquera les commandes utilisées à la calculatrice, il est conseillé d'utiliser la commande `sum`.
4. Déterminer le maximum des valeurs de $u_j(7)$. En comparant avec $S_N(7.0)$, expliquez le résultat ci-dessus.
5. Proposer une méthode permettant d'obtenir plus efficacement et plus précisément une valeur approchée de $\sin(7)$.