Examen du 16 mai, 13h-15h.

Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.
Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.
On pourra justifier le résultat de tout calcul fait à la calculatrice en indiquant sur la copie la commande utilisée.
Ce sujet comporte deux pages (barême indicatif non contractuel tenant compte de la longueur du sujet : 5, 5, 6, 6).

On souhaite déterminer une valeur exacte ou approchée de

$$F(t)=\int_0^t f(x)\,dx, \quad f(x)=\frac{x^2-2}{x^4+4}$$

pour $t\in[0,1]$ de plusieurs manières indépendantes.

1 Calcul exact

1. Déterminer deux polynômes U et V tels que
$$(x^2-2x+2)U+(x^2+2x+2)V=x^2-2$$
2. En déduire une écriture de $f(x)$ sous la forme de somme de deux fractions de dénominateur de degré 2.
3. En déduire une primitive de $f(x)$ et la valeur de $F(t)$. Donner $F(1)$ puis une valeur approchée à `1e-3` près.

2 Calcul approché par la méthode du point milieu

1. Déterminer la dérivée seconde de f à la calculatrice. Déterminer M_2 un majorant de $|f''|$ sur $[0,1]$ (on pourra calculer la dérivée 3-ième et ses racines dans $[0,1]$ pour justifier).
2. On fixe $t=1$. Combien de subdivisions N permettent de certifier que la méthode du point milieu donne une valeur approchée de $F(1)$ avec une erreur inférieure à ε=`1e-2` ? Donner la valeur approchée de $F(1)$ obtenue par la méthode du point milieu avec ce nombre de subdivisions.
3. Ce nombre N de subdivisions permet-il d'assurer une erreur d'au plus ε pour toute valeur de $t\in[0,1]$?

3 Calcul approché par interpolation

1. Déterminer P le polynôme d'interpolation de f aux points d'abscisses 0, 1/2 et 1.
2. Déterminer à la calculatrice la dérivée 3-ième de f puis un majorant M_3 de $|f'''|$ sur $[0,1]$ (on pourra calculer la dérivée 4-ième, et des racines approchées du numérateur sur $[0,1]$ pour justifier).
3. Donner une majoration de l'erreur d'interpolation faisant intervenir $x(x-1/2)(x-1)$
4. En déduire une majoration de $|\int_0^1(f(x)-P(x))\,dx|$ (on pourra donner la valeur de $\int_0^1|x(x-1/2)(x-1)|\,dx$ en indiquant la commande utilisée à la calculatrice). Comparer avec la valeur de l'erreur (en utilisant la valeur exacte de $F(1)$)
5. Interpréter cette méthode comme une méthode de Simpson dont on donnera le nombre de subdivisions. En déduire une autre majoration de l'erreur commise, comparer avec la majoration précédente.

4 Calcul approché par série entière

1. En posant $x^4=4X$, montrer que pour $x^4<4$ on a
$$\frac{1}{4+x^4}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}x^{4n}$$
En déduire le développement en série entière de $f(x)$ en $x=0$ en multipliant par x^2-2.

2. Déterminer le développement en série entière de $F(t)$ en $t = 0$ sous la forme

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^{4n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} G_n t^{4n+3}$$

3. Montrer que chacune de ces deux séries est une série alternée pour $t \in [0,1]$.
4. On pose

$$R_{F,N}(t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} F_n t^{4n+1}, \quad R_{G,N}(t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} G_n t^{4n+3}$$

   Donner une majoration de $|R_{F,N}(t)|$ et de $|R_{G,N}(t)|$ en fonction de N et de t pour $t \in [0,1]$.
5. On fixe $t = 1$. Déterminer une valeur de N telle que la somme partielle de la série

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} F_n t^{4n+1} + \sum_{n=0}^{N} G_n t^{4n+3}$$

   soit une valeur approchée de $F(1)$ avec une erreur inférieure à ε=`1e-2`. Donner la valeur approchée de $F(1)$ correspondante.
6. Cette valeur de N convient-elle pour toute valeur de $t \in [0,1]$?