# 1 Point fixe et Newton

**Exercice 1. Point fixe** Soit

$$f(x) = \cos(\frac{1}{x+1})$$

définie sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Faire le tableau de variations de $f$.
2. Donner un majorant $k$ de $|f'|$ sur $[0, 1]$.
3. Montrer que $f$ satisfait aux hypothèses du théorème du point fixe et en déduire une suite récurrente convergeant vers l'unique solution de $\cos(1/(l + 1)) = l$ sur $[0, 1]$.
4. Combien de termes de la suite faut-il calculer pour être sur d'obtenir une valeur approchée à $1e - 3$ près de $l$ ? Même question pour avoir une valeur approchée à $1e - 6$ près. Faites le calcul du nombre de termes de deux manières : sans calculer les termes de la suite (estimation à priori, uniquement avec la valeur de $k$ et indépendamment de $u_0 \in [0, 1]$), ou en estimant $|u_n - l|$ en fonction de $|u_{n+1} - u_n|$ (estimation à postériori dépendant du $u_0$ choisi).

**Exercice 2. Points fixes instables.** On veut résoudre l'équation

$$e^u - 2 = u \, , \, u > 0 \tag{1}$$

par la méthode du point fixe.

1. La fonction $f(u) = e^u - 2$ est-elle contractante sur $[0, \infty[$ ? Tracer sur le graphe de $f$ les premières valeurs de la suite itérée $u_n = f^n(u_0)$ pour une valeur initiale $u_0 > 0$. La suite converge-t-elle ?
   En considérant la fonction réciproque de l'exponentielle, trouver une méthode de point fixe pour résoudre (1) numériquement.
   Justifier la convergence et donner une majoration théorique de l'erreur.
   Donner la solution approchée et le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une précision de $10^{-6}$ en prenant $u_0 = 1$.
2. Utiliser la même méthode pour résoudre numériquement l'équation
   $$\tan(u) = u \, , \, \pi/2 < u < 3\pi/2 \, .$$
3. Étant donnée une fonction non contractante quelconque $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sous quelles conditions sur $f$ votre méthode est-elle applicable ?

**Exercice 3. Du point fixe à Newton.** Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une contraction, c'est-à-dire qu'il existe $k < 1$ tel que $|f(u) - f(v)| \leq k|u - v|$ pour tout $u, v \in [a, b]$. On rappelle qu'il existe alors un unique point fixe pour $f$, que l'on note $\ell$, et que pour tout $u_0 \in [a, b]$, la suite $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $\ell$.

1. Montrer que le nombre de décimales de $u_n$ coïncidant avec celles du point fixe $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ augmente (au moins) proportionnellement à $n$ quand $n$ croît (*convergence linéaire*).
2. Si l'on suppose de plus que $f$ est de classe $C^2([a, b])$ et que $f'(\ell) = 0$, montrer que le nombre de décimales de $u_n$ coïncidant avec celles de $\ell$ augmente beaucoup plus rapidement avec $n$ : (au moins) comme $2^n$ (*convergence exponentielle*).
   *Indication :* Utiliser la formule de Taylor avec reste à l'ordre 2.

**Exercice 4. Newton (1).** Utiliser la méthode de Newton pour résoudre l'équation (1) $e^u - 2 = u \, , \, u > 0$. Justifier la convergence et donner une majoration théorique de l'erreur.
Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour avoir une précision de $1e - 6$ en prenant $x_0 = 1$ (comparer avec le résultat de l'exercice 2) ? Peut-on choisir $x_0 = 0$ ?

**Exercice 5. Newton (2)** On veut résoudre par la méthode de Newton l'équation

$$x = \cos(\frac{1}{x+1}), \quad x \in [0, 1]$$

Écrire cette équation sous la forme $f(x) = 0$, étudier la convexité de $f$, en déduire une valeur de $u_0$ pour laquelle on peut affirmer que la suite $(u_n)$ de la méthode de Newton converge vers $l$ tel que $f(l) = 0$. Calculer $u_2$ puis donner un encadrement de $|u_2 - l|$.

**Exercice 6. Problèmes de convergence ?** Soit $g(u) = \arctan(u)$. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite itérée obtenue en appliquant la méthode de Newton à l'équation $g(r) = 0$ en partant de $x_0$.

1. Déterminer numériquement une valeur $a > 0$ telle que si $x_0 = a$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oscille entre les deux valeurs $\pm a$ de part et d'autre de la solution exacte $r = 0$.
   *Indication :* On pourra par exemple chercher $a$ par une méthode de point fixe sur un intervalle bien choisi.
2. Déterminer *graphiquement* le comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quant $n \to \infty$ pour $|x_0| < a$ et pour $|x_0| > a$.

## 2 Représentation des entiers et des réels.

**Exercice 7. Entiers en base 2 et en base 16.**

1. Soit $n_1$ l'entier s'écrivant 1234 en base 16. Donner $n_1$ en base 10.
2. Soit $n_2$ l'entier s'écrivant 6000 en base 10. Écrire $n_2$ en base 16 puis en base 2.

**Exercice 8. Opérations en base 2.** Donner les tables d'addition et de multiplication en base 2. Calculer la somme, la différence et le produit des 2 entiers s'écrivant 1101 et 1011 en base 2 en utilisant l'algorithme “école primaire” en base 2. Vérifiez vos résultats en les comparant à ceux obtenus en base 10.

**Exercice 9. Fractions en base 2.** Écrire les nombres décimaux 0.5, 0.1875 et 0.1 en base 2. Comment ces nombres sont-ils codés sur un ordinateur disposant de 48 bit pour la mantisse et de 11 bit pour l'exposant ? Le codage est-il exact ? Que donne le calcul de $0.5 - 5 * 0.1$ effectué avec Xcas ? Expliquer.

**Exercice 10. (Examen Juin 2006)** Comparer les valeurs de

$$\sqrt{10^{11}+1} - \sqrt{10^{11}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{10^{11}+1} + \sqrt{10^{11}}}$$

en calcul exact et en calcul approché. En calcul approché, laquelle de ces deux valeurs vous parait-elle plus proche de la valeur exacte correspondante ?

**Exercice 11. Erreur relative pour l'inverse.** Donner l'erreur relative de $1/x$ par rapport à $1/x_0$ en fonction de l'erreur relative $\epsilon = |x - x_0|/|x_0|$ de $x$ par rapport à $x_0$ (on pourra se limiter au plus bas ordre en $\epsilon$).

**Exercice 12. Méthode de Horner (1).** Il s'agit d'évaluer efficacement un polynôme en un point. On note $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, on pose $b_0 = P(\alpha)$ et on écrit :

$$P(X) - b_0 = (X - \alpha)Q(X)$$

où :

$$Q(X) = b_n X^{n-1} + ... + b_2 X + b_1 \ .$$

On calcule alors par ordre décroissant $b_n$, $b_{n-1}$, ..., $b_0$.

1. Donner $b_n$ en fonction de $a_n$ puis $b_i$ en fonction de $a_i$ et $b_{i+1}$ pour $i = n-1, n-2, \ldots, 1$.
2. Appliquer la méthode ci-dessus pour calculer $P(\alpha)$ pour $P(X) = X^3 + 7X^2 + 7X$ et $\alpha = 16$.
3. Même question pour $P(X) = X^5 + 4X^4 + 3X^3$ et $\alpha = 5$. En déduire l'écriture en base 10 de l'entier s'écrivant 143000 en base 5.

**Exercice 13. Méthode de Horner (2).** Pour calculer tous les coefficients du développement de Taylor du polynôme $P(X)$ en un point, on pose $P_0(X) = P(X)$ et on répète l'algorithme de l'exercice précèdent pour calculer successivement les coefficients des polynômes $P_0(X), P_1(X), \ldots, P_n(X)$ définis par :

$$\begin{array}{rcl} P_0(X) & = & (X-\alpha)P_1(X) + P_0(\alpha) \\ P_1(X) & = & (X-\alpha)P_2(X) + P_1(\alpha) \\ & \ldots & \\ P_{n-1}(X) & = & (X-\alpha)P_n(X) + P_{n-1}(\alpha) \end{array}$$

jusqu'à ce que l'on obtienne un polynôme de degré zéro, $P_n(X) = const.$

1. Montrer que

$$P(X) = (X-\alpha)^n P_n(\alpha) + (X-\alpha)^{n-1} P_{n-1}(\alpha) + \cdots (X-\alpha)P_1(\alpha) + P_0(\alpha) \ .$$

   Comment sont reliés $P_i(\alpha)$ et la $i$-ième dérivée $P^{[i]}(\alpha)$ de $P$ au point $\alpha$ ?
2. Utiliser cette méthode pour calculer $P^{[i]}(\alpha)$, $i = 0, 1, 2, 3$, pour $P(X) = X^3 - 2X + 5$ et $\alpha = 39$.

# 3 Taylor, séries entières.

**Exercice 14. Calcul de l'exponentielle.** On veut calculer $e^8$ avec une précision relative de $2^{-52}$. Si on utilise une somme partielle de la série $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, combien de termes doit-on prendre ? Qu'en est-il si on calcule plutôt $((e^2)^2)^2$ ?

**Exercice 15. Calcul de $x^{1/4}$.** On veut déterminer une valeur approchée de la racine quatrième d'un nombre réel positif. On commence par chercher une valeur approchée de $y = (1+x)^{1/4}$ pour $x \geq 0$.

1. On suppose que $x = 1$ (donc $y = 2^{1/4}$).
   Donner un polynôme $P(X)$ de degré 4, à coefficients entiers et tel que $P(y) = 0$. Donner la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ obtenue en appliquant la méthode de Newton à $P$.
   Donner une valeur $u_0$ pour laquelle la suite $u_n$ converge vers $y$ (justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour cette valeur de $u_0$).
   Calculer $u_4$, en déduire un encadrement de $2^{1/4}$.
   Peut-on appliquer la même méthode pour $x \geq 0$ quelconque ?
2. On suppose que l'on a calculé $2^{1/4}$ à $10^{-16}$ près. Proposer une méthode permettant de calculer une valeur approchée de $x^{1/4}$ pour $x \geq 0$, en utilisant l'écriture mantisse-exposant de $x$ en base 2 :

$$x = 2^e(1+m), \quad e \in \mathbb{Z}, m \in [0, 1[$$

   et en utilisant la méthode ci-dessus. Discuter la précision de l'approximation obtenue.

**Exercice 16. Racine quatrième.** Donner le développement de Taylor de $(1+x)^{1/4}$ en $x = 0$ à l'ordre $n$ sous forme d'un polynôme $T_n(x)$ de degré $n$ et d'un reste $R_n(x)$.
Donner une majoration du reste $R_n(x)$ pour $n = 4$ et $x = 1/2$, en déduire un encadrement de $(3/2)^{1/4}$.
Déterminer une valeur de $n$ pour que $T_n(x)$ soit une valeur approchée de $(1+x)^{1/4}$ à $10^{-5}$ près pour tout $x \in [0, 1/2]$. Comparer l'efficacité de cette méthode à celle de la méthode de Newton (exercice précédent).
**Exercice 17.** Donner les développements en séries entières (en $x = 0$) des fonctions suivantes, leurs rayons de convergence et une majoration du reste de la série lorsque $|x| \leq 1/2$ :

1. $f_1(x) = \cos(x)$
2. $f_2(x) = \sin(x)$
3. $f_3(x) = (1+x^2)^{-1}$
4. $f_4(x) = \arctan(x)$ (Indication : intégrer termes à termes le développement de $f_3(x)$)
5. $f_5(x) = (1+x)^{-1/2}$.

**Exercice 18.** Comparer la précision de la valeur approchée de $e^{-4}$ obtenue en calculant le développement de Taylor de l'exponentielle en 0 à l'ordre 10 en $x = -4$ ou en prenant l'inverse du développement de Taylor à l'ordre 10 en $x = 4$.

**Exercice 19.** On souhaite calculer une valeur approchée de

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

pour $x \in [0, 1]$. Déterminer le développement en séries entières de $e^{-t^2}$ en $t = 0$, son rayon de convergence, en déduire le développement en séries entières de $F$ en $x = 0$. Déterminer une majoration du reste de la série pour $x \in [0, 1]$. En déduire l'ordre auquel on peut s'arrêter en étant sur d'avoir une valeur approchée de $F$ à $1e - 8$ près.

**Exercice 20.** Même question pour

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2} - 1}{t}\, dt$$

**Exercice 21. Fonction de Bessel.** On veut calculer une valeur approchée de

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-\mathrm{i}\, x \cos(t))\, dt$$

pour $x \in \mathbb{C}, |x| \leq 1$.

1. En intégrant termes à termes le développement en série entière au voisinage de $x = 0$ de $\exp(-\mathrm{i}\, x \cos(t))$, déterminer la série entière de $J_0(x)$ en $x = 0$,
$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$
2. Montrer que $a_n = 0$ si $n$ est impair.
3. Soit $n \geq 2$. Montrer que $a_n = -a_{n-2}/n^2$.
*Indication :* On pourra utiliser
$$\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n dt = \int_0^{2\pi} (\cos(t))^{n-2} dt - \int_0^{2\pi} (\cos(t))^{n-2} \sin(t) \sin(t)\, dt$$
puis intégrer par parties la seconde intégrale.
4. Montrer que $a_n = (-1)^p/(2^p p!)^2$ si $n = 2p$ est pair.
5. Donner une majoration de la valeur absolue du reste
$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$$
pour $x \in \mathbb{C}, |x| \leq 1$. Déterminer une valeur approchée de $J_0(1)$ et de $J_0(\mathrm{i}\,)$ à $10^{-8}$ près.