Exercice 1. Algorithme d'Euclide étendu pour les entiers. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu g le plus grand commun diviseur (PGCD) de 1430 et 1105 et deux entiers u et v satisfaisant l'identité de Bezout,

$$1430u + 1105v = g$$

Combien d'itérations sont-elles nécessaires ?

Exercice 2. Algorithme d'Euclide pour les polynômes. On considère les polynômes $R_0(X) = X^3 + X^2 + 1$ et $R_1(X) = X^2 - 1$. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu G, un PGCD de R_0 et R_1, et des polynômes U et V tels que $UR_0 + VR_1 = G$.

Exercice 3. Euclide étendu, primitive/séries entières. Soit $P(X) = X^2 - 1$.

1. Vérifier à la calculatrice que $P(X)$ et $P'(X)$ sont premiers entre eux et déterminer des polynômes W et Z tels que $WP + ZP' = 1$.
2. En déduire une primitive de $\frac{1}{P^2}$ en remplaçant le numérateur par la relation trouvée et en effectuant une intégration par parties pour le terme ZP'/P^2.
3. Déterminer une primitive de
$$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x+2)}$$
4. Soit $Q(X) = X + 2$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux et déterminer des polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.
5. En déduire le terme d'ordre n du développement en série entière en 0 de $f(x)$.

Exercice 4. Calcul approché des racines d'un polynôme. Peut-on appliquer la méthode de Newton pour déterminer des valeurs approchées des racines des polynômes suivants ?

1. $R(X) = X^2 + 10^{-8}$
2. $P_\lambda(X) = X^3 - 3X + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $Q(X) = X^3$.

Si oui, donner pour chaque racine un domaine de valeurs initiales u_0 telles que la suite itérée de Newton $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la racine cherchée (pour P_λ, discuter les différents cas de figure suivant les valeurs de λ).

Exercice 5. Racine complexe Soit $P = x^3 + x + 1$ et $r = \frac{1}{3} + \frac{7}{6}i$. Déterminer un disque du plan complexe de centre r contenant au moins une racine de P. Améliorer la précision en effectuant une itération de la méthode de Newton. Discuter les avantages/inconvénients à utiliser des rationnels vs des nombres flottants approchés. Que peut-on dire des autres racines de P ?

Exercice 6. Racines multiples Soit $P = x^6 + 5x^5 + 6x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 1$. En utilisant le pgcd de P et sa dérivée, déterminer un polynôme ayant les mêmes racines que P mais toutes de multiplicité 1. Appliquer la méthode de Newton pour trouver les racines réelles de P.

Exercice 7. Algorithme de Sturm. Déterminer à l'aide de l'algorithme de Sturm le nombre de racines réelles de $P(X) = X^3 - 3X$ dans les intervalles suivants : $I_1 = [-2, -1]$, $I_2 = [-1, 1]$ et $I_3 = [1, 2]$.

Exercice 8. Systèmes d'équations non linéaires

1. Soit P et Q deux polynômes. Montrer que le système
$$\begin{cases} P(x) &= 0 \\ Q(x) &= 0 \end{cases} \tag{1}$$
est équivalent à $PGCD(P, Q)(x) = 0$. En déduire que (1) admet une solution si et seulement si P et Q ne sont pas premiers entre eux. Dans ce cas, comment sont reliés le nombre de solutions et le degré de $PGCD(P, Q)$?

2. Soit $P(X) = X^3 + \gamma$ et $Q(X) = X^2 + \alpha$ avec α et $\gamma \in \mathbb{R}$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $\alpha^3 + \gamma^2 \neq 0$.
   Indication : utiliser l'identité de Bezout $PGCD(P, Q) = UP + VQ$ avec $U(X) = aX + b$ et $V(X) = cX^2 + dX + e$, puis écrire un système linéaire à 5 équations pour a, b, c, d et e.
3. En déduire que (1) admet une solution (dans $\mathbb{C}$) si et seulement si $\alpha^3 + \gamma^2 = 0$. Déterminer dans ce cas les solutions.

Exercice 9. Interpolation
Déterminer le polynôme d'interpolation de $1/x$ aux points $1, 2, 3$ en effectuant à la main l'algorithme des différences divisées. Tracer sur l'intervalle $[0, 4]$ la représentation graphique de $1/x$ et de son polynôme d'interpolation.

Exercice 10. Erreur d'interpolation
Soit $f(x) = \ln(1 + x)$ définie sur l'intervalle $[0, 1]$. On se fixe $n \geq 2$ et on calcule le polynôme d'interpolation de f aux $n + 1$ points $x_k = \frac{k}{n}, k \in [0, n]$. Par exemple pour $n = 4$, on calcule le polynôme aux 5 points $x_0 = 0, x_1 = 1/4, x_2 = 1/2, x_3 = 3/4, x_4 = 1$.

1. Déterminer un majorant de l'erreur d'interpolation lorsque $n = 4$.
2. Que se passe-t-il lorsque n est grand ?

Exercice 11. Interpolation et précision (juin 2022)
Soit $x_0 = 10^4, x_1 = 10^4 + 1, x_2 = 10^4 + 2$ et $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 2$. Soit P le polynôme d'interpolation de degré au plus 2 passant par les points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

1. Déterminer P par l'algorithme des différences divisées sous la forme
$$N(x) = \alpha_0 + (x - x_0)(\alpha_1 + (x - x_1)\alpha_2)$$
2. Développer P sous la forme
$$D(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$
3. Soit $x = 10^4 + 1/3$. Déterminer $P(x)$ en calcul exact.
4. On calcule maintenant en approché, $x = 10000.0 + 1.0/3.0$. Déterminer une valeur approchée de $P(x)$ en utilisant la forme $N(x)$ et la forme $D(x)$.
5. On suppose qu'on travaille avec des flottants avec une précision relative de 15 chiffres (`1e-15`). Estimer l'erreur absolue sur $x - x_0$ et $x - x_1$, en déduire l'erreur relative sur $N(x)$.
6. Estimer l'erreur relative sur $D(x)$ en comparant a_0 avec $D(x)$.
7. Expliquez la précision des résultats de la question 4. Quelle forme faut-il choisir pour minimiser les erreurs ?

Exercice 12. Comparaison intégrale exacte et approchée.
Calculer les sommes finies
$$\sum_{i=1}^{N} i^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} i^3$$
(on pourra utiliser la formule de somme d'Euler-MacLaurin). En déduire une approximation de l'intégrale
$$I = \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$$
en utilisant

1. la méthode des rectangles à gauche
2. la méthode du point milieu

pour un pas $h = 1/N$. Comparer la valeur approchée avec la valeur exacte dans les deux cas. Quelle est la méthode la plus précise ?

Exercice 13. Méthode du point milieu
Déterminer une valeur approchée de

$$\int_0^1 \exp(-x^2)\, dx$$

en appliquant la méthode du point milieu avec $N = 10$ subdivisions. Donner et justifier une majoration de l'erreur commise.

Exercice 14. Méthode de Simpson
Le but de cet exercice est de calculer pour $x \in [0, 1]$ donné une approximation de l'intégrale définie par :

$$(E) \qquad F(x) = \int_0^x \exp(\exp(t))\, dt$$

où $\exp$ désigne la fonction exponentielle, on notera :

$$f(t) = \exp(\exp(t))$$

1. Calculer la dérivée quatrième de f. Déterminer la valeur du maximum de $|f^{[4]}(t)|$ pour $t \in [0, 1]$, que l'on notera M_4.
2. Déterminer le nombre N de subdivisions qui assure que la méthode de Simpson donne une valeur approchée de $F(1)$ à $1e-4$ près et à $1e-8$ près. Calculer une valeur approchée de $F(1)$ à $1e-8$ près.
3. Soit $x \in [0, 1]$. Déterminer le nombre N de subdivisions qui assure que la méthode de Simpson donne une valeur approchée de $F(x)$ à $1e-8$ près, on exprimera N en fonction de x.
4. Pourrait-on calculer une valeur approchée de $F(x)$ par un développement en séries entières ? Si oui, indiquez comment procéder, si non, expliquez pourquoi.

Exercice 15. Intégrale par diverses méthodes (mai 2023)
On souhaite calculer une valeur approchée de

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt, \quad x \in [0, 1]$$

On pose

$$f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$$

Partie 1 : séries entières.

1. Donner le développement en séries entières de f et son rayon de convergence
2. En déduire le développement en série entière de F
3. Déterminer une majoration du reste d'ordre N du développement en série de F en fonction de x.
4. En déduire une valeur de N pour laquelle le reste d'ordre N est plus petit que `1e-5` pour tout $x \in [0, 1/2]$
5. Donner un rationnel dont on peut certifier qu'il s'agit d'une valeur approchée de $F(1/2)$ à `1e-5` près
6. Que se passe-t-il si $x = 1$?

Partie 2 : méthode du point milieu et de Simpson
On a

$$F(1) = F(\frac{1}{2}) + I, \quad I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt$$

et on va déterminer une valeur approchée de I, l'intégrale de f entre 1/2 et 1, par la méthode du point milieu ou de Simpson.

1. Déterminer f'' (on pourra utiliser sans justifications le résultat de la calculatrice). En déduire M_2 un majorant de $|f''|$ sur $[1/2, 1]$ (justifiez).
2. Combien de subdivisions sont-elles nécessaires pour avoir une valeur approchée de I à `1e-5` près par la méthode du point milieu ?
3. Reprendre les deux questions précédentes en utilisant la méthode de Simpson.
4. Déterminer une valeur approchée de I à `1e-5` par la méthode du point milieu ou par la méthode de Simpson. On donnera cette valeur d'abord sous la forme d'une somme puis sa valeur approchée obtenue à la calculatrice.